رياضيات 70

سلم تصحيح مقرر معادلات تفاضلية ١/
لطلاب السنة الثانية رياضيات للفصل
الدراسي الأول (تكميلية) لعام
٢٠١٥/٢٠١٦م.

جواب السؤال الأول (٥٠ درجة):

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad ; \quad y_1 = \frac{1}{x}$$

معادلة ريكاتي لحلها نفرض:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = y = y_1 + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$$

نعوض في المعادلة:

$$\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x \cdot z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x^2}$$

$$-z' - 1 - \frac{2}{x} z = 0$$

$$z' + \frac{2}{x} z = -1 \quad (*)$$

معادلة خطية غير متجانسة:

15 $z' = -\frac{2}{x} z \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow z = c x^{-2} \quad (**)$

$z' = c' x^{-2} - 2c x^{-3} \Rightarrow$ بالتعويض في $(*)$ $\Rightarrow$

$c' x^{-2} - 2c x^{-3} + 2c x^{-3} = -1 \Rightarrow c' = -x^2 \Rightarrow$

$c = -\frac{x^3}{3} + c_1 \Rightarrow z = -\frac{x}{3} + c_1 x^{-2}$

بالعودة للمتحولات القديمة:

20 $y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3c_1 - x^3}$

جواب السؤال الثاني (٥٠ درجة):

$$(x^2 + 2xy)\,dx + xy\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 2xy}{xy} = -\frac{1 + 2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

متجانسة من الدرجة نفرض

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$$

نعوض في المعادلة (1):

$$z + xz' = -\frac{1+2z}{z} \Rightarrow xz' = -\frac{1+2z}{z} - z$$

15 $$xz' = \frac{-1-2z-z^2}{z} \Rightarrow \int \frac{z\,dz}{z^2+2z+1} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{z\,dz}{(z+1)^2} = -\ln|x| + \ln c \Rightarrow$$

$$\int \frac{z+1-1}{(z+1)^2}\,dz = -\ln|x| + \ln c$$

$$\int \frac{dz}{z+1} - \int \frac{dz}{(z+1)^2} = -\ln|x + \ln c$$

$$\ln|z+1| + \frac{1}{z+1} = -\ln x + \ln c$$

~~$\ln \frac{c(z+1)}{cx}$~~ $$\ln(cx(z+1)) = -\frac{1}{z+1} \Rightarrow$$

10 $$\ln c\, x\left(\frac{y}{x}+1\right) = -\frac{x}{y+x}$$

جواب السؤال الثالث (50 درجة):

$$2xy' + \frac{1}{y'} - y = 0$$

نضع $y'=p$ نجد:

$$y = 2xp + \frac{1}{p} \Rightarrow$$

نفاضل بالنسبة لـ x:

$$\frac{dy}{dx} = p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow -p = \left(\frac{2xp^2-1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

15 $$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = p^{-3}$$ وعامل تكامل $\mu = p^2$

$$[p^2x]' = p^{-1}$$

$$x = p^{-2}(\ln p + c)$$

10 $$y = p^{-1}(2\ln p + 1) + 2cp^{-1}$$

جـ/ السؤال الرابع (٥ درجة):

$$2yy'' = 1 + y'^2$$

نضع $y' = p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy} \Rightarrow$

$$2yp\frac{dp}{dy} = 1 + p^2$$

10 $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2p\,dp}{1+p^2} \Rightarrow \ln y + \ln c_1 = \ln(1+p^2)$

$\Rightarrow c_1 y = 1 + p^2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{c_1 y - 1} \Rightarrow$

$y' = p = \pm\sqrt{c_1 y - 1} \Rightarrow \pm\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}}$

15 $\Rightarrow c_2 \pm \frac{1}{2} c_1 x = \sqrt{c_1 y - 1}$.